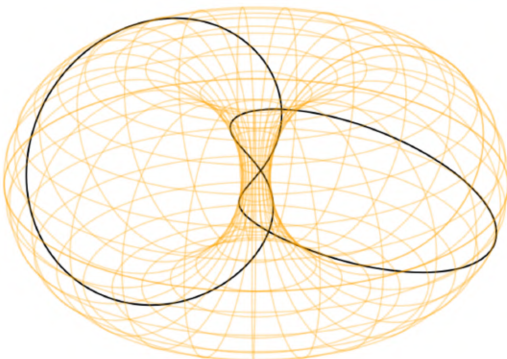
Nœud de Morton



Pierre LARIVÉ

Mars-Avril 2024

CENTRE
HENRI LEBESGUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES

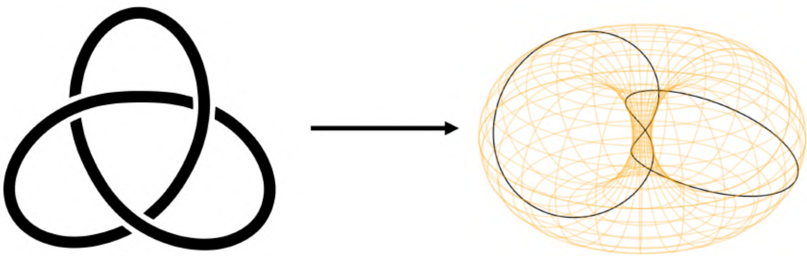
Maison des Mathématiques de l'ouest

Présentation de l’objet

En 1978, le mathématicien Freedman s’est posé la question suivante : une courbe simple tracée dans $\mathbb{R}^3$ admet-elle toujours un plan tritangent, c’est-à-dire un plan passant par trois points distincts et étant tangent à la courbe en ces points ?

Le nœud de Morton est un exemple de courbe qui ne présente aucun plan tritangent. Derrière ce nom se cache une famille de nœuds, dont plusieurs représentants ont été imprimés en 3D par Rémi Coulon.

Le nœud de Morton est une représentation du nœud de trèfle, le plus simple nœud après le nœud trivial, construite sur un tore de révolution. Pour la tracer, on choisit un point de départ sur le tore (dont on peut choisir les proportions), puis on effectue à vitesse régulière trois tours autour de l’axe du tore tout en effectuant deux tours autour de son bras.

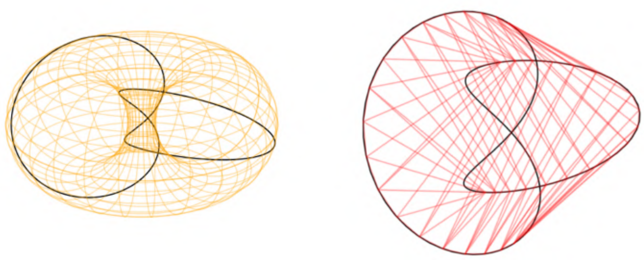


Nœud de trèfle (à gauche) et exemple d’un nœud de Morton (à droite)

Un intérêt d’une telle courbe est que, comme elle ne présente aucun plan tritangent, un modèle physique du nœud reposera toujours sur au plus deux de ses points. Si on donne une petite vitesse initiale au modèle, celui-ci se mettra donc à rouler, suivant ce que l’on appelle un roulement sans glissement.

Tout au long d’un roulement sans glissement, l’énergie mécanique du centre de masse se conserve et sa répartition évolue au cours du temps entre énergie cinétique et énergie potentielle. Pour observer un roulement le plus régulier possible en vitesse, on peut choisir un nœud de Morton tracé sur un tore dont les dimensions permettent une variation d’énergie potentielle la plus faible possible. Autrement dit, ces dimensions sont telles que le centre de masse du modèle soit à une distance la plus constante possible de tous ses plans bitangents.

La détermination de ces paramètres optimaux peut être réalisée numériquement, en approximant le modèle par un grand nombre de ses points et en calculant l’enveloppe convexe de ces points. Les faces de l’enveloppe convexe sont alors des approximations des plans bitangents sur lequel roulera le modèle.



Nœud de Morton "optimal" (à gauche) et représentation de son enveloppe convexe en rouge (à droite)

Ressources

Références utilisées

— Article sur le site Kits Maths CNRS : https://kits.math.cnrs.fr/activites/noeud-de-morton
— Étude du nœud de Morton pour optimiser son roulement : Abigail Eget, Stephen K. Lucas, Laura Taalman, *Optimizing Morton's Tritangentless Knots for Rolling*, 2020
— Étude du nœud de Morton par Morton lui-même : H. R. Morton, *Trefoil knots without tritangent planes*, Bull. London Math. Soc., vol. 23, 1991, pp. 78–80.