

Flocons de neige



Crédit : Kenneth G. Libbrecht, <https://www.snowcrystals.com/>



Maison des
Mathématiques
de l'ouest

Ce document est mis à disposition selon les termes de la licence Creative Commons "Attribution – Partage dans les mêmes conditions 4.0 International".



Présentation de l'objet ou de l'atelier

Les flocons de neiges nous sont familiers. Mais connaissons-nous les si bien ?

Regarder de plus près la forme des flocons permet, selon le public, d'aborder les symmétries, les fractales...

Cet atelier est en grande partie issue du livre d'Etienne Ghys, *La petite histoire des flocons de neige*, ainsi que du site de Kenneth G. Libbrecht, <https://www.snowcrystals.com/>.

Déroulé typique d'une activité

Plusieurs activités sont possibles selon l'âge et l'expérience du public.

Forme des flocons et groupes de symmétrie On peut commencer par demander aux participants de dessiner leur flocon de neige. Puis d'engager la discussion sur le thème : sont-ils réalistes ?

Il est amusant de remarquer que la première représentation connue de flocons de neige est, elle, parfaitement fantaisiste.



FIGURE 1 – Illustrations issue de *Historia de gentibus septentrionalibus*, traduction en français *Histoire des peuples du Nord*, de Olaus Magnus, 1555.

On peut ensuite présenter la page suivante qui correspond mieux à la fois à l'expérience et à notre image actuelle de ce que sont les flocons.

Puis se mettre d'accord sur quelques "règles". Invariance par rotation de 60 degrés (1/6^e de tour pour les plus jeunes), symmétrie axiale. Ces deux invariances peuvent être visualisées en imprimant la feuille sur un papier calque.

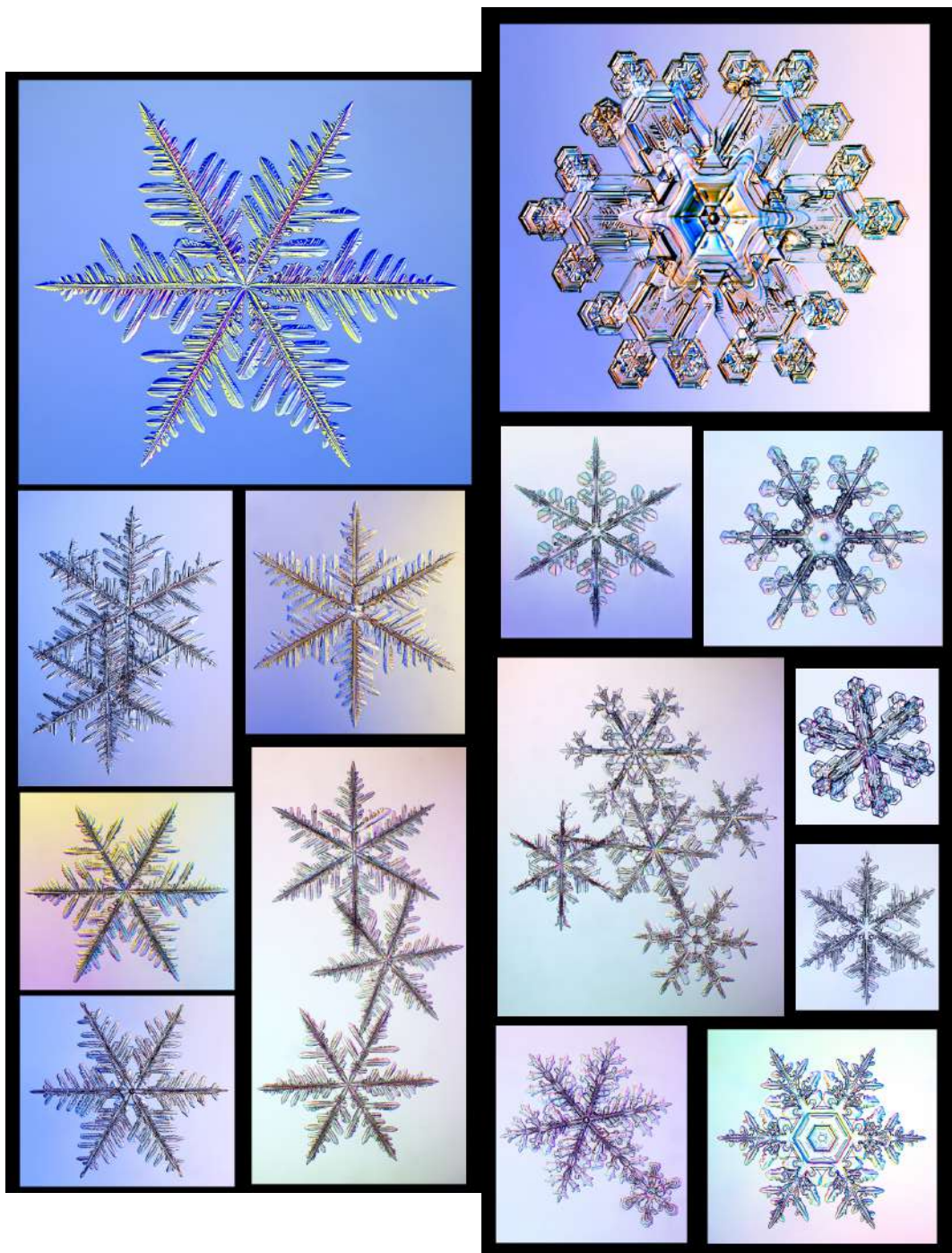


FIGURE 2 – Quelques flocons. Illustrations issues de <https://www.snowcrystals.com/>

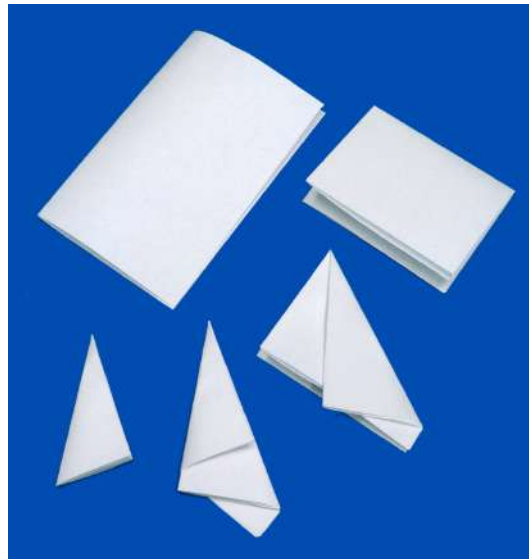
Diversité des flocons On pourra ensuite poser la question : est-ce que tous les flocons ont cette forme ? La réponse est non. Notre représentation usuelle est issue d'une modélisation, évacuant tous les défauts, et sélectionnant parmi les types de flocons ceux qui nous paraissent les plus jolis ou les plus intéressants.

 Simple Prisms	 Solid Columns	 Sheaths	 Scrolls on Plates	 Triangular Forms
 Hexagonal Plates	 Hollow Columns	 Cups	 Columns on Plates	 12-branched Stars
 Stellar Plates	 Bullet Rosettes	 Capped Columns	 Split Plates & Stars	 Radiating Plates
 Sectoried Plates	 Isolated Bullets	 Multiply Capped Columns	 Skeletal Forms	 Radiating Dendrites
 Simple Stars	 Simple Needles	 Capped Bullets	 Twin Columns	 Irregulars
 Stellar Dendrites	 Needle Clusters	 Double Plates	 Arrowhead Twins	 Rimed
 Fernlike Stellar Dendrites	 Crossed Needles	 Hollow Plates	 Crossed Plates	 Graupel

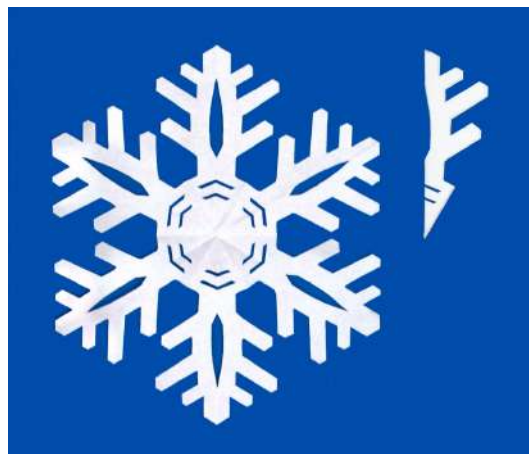
Types of Snowflakes ... SnowCrystals.com

FIGURE 3 – Une classification de flocons. Illustration issue de <https://www.snowcrystals.com/>

Pliage et découpage de flocons Une fois que l'on s'est mis d'accord sur les propriétés de nos flocons, nous pouvons les réaliser par pliage et découpage. Voici la méthode à suivre à partir d'une feuille A4.



(a) pliage



(b) découpage

FIGURE 4 – Pliage et découpage d'un flocon. Illustration issue de <https://www.snowcrystals.com/>

Croissance des flocons

Une activité permet de réaliser la croissance d'un flocon à partir de règles simples. Nous allons placer progressivement des pions sur une grilles hexagonales^a (on peut se fournir directement en jetons hexagonaux).

L'algorithme dû à Norman Packard (en 1986) est le suivant. On commence par placer un (ou plusieurs) jetons. À chaque étape on considère l'ensemble des cases vides autour des jetons existants. On ajoute un jeton dans ces cases si elles sont en contact avec

- 1 case avec un jeton (processus de création de branche : le cristal croît plus vite sur une case cernée par la vapeur)
- 3,4,5 ou 6 cases avec un jeton (processus de facettage : la vapeur s'accroche au cristal dans les infractuosités)

Après plusieurs étapes, le cristal oscille entre des phases d'hexagones, et des phases avec des branches dentelées.

Le modèle a été amélioré par Clifford Reiter, puis Janko Gravner et David Griffeath, mais demande l'utilisation d'un ordinateur.

a. Pourquoi une grille hexagonale? Peut-être parce que c'est la manière la plus compacte de disposer des disques dans le plan (démonstré par Axel Thue en 1890, démonstration expliquée sur le blog du projet Klein). Rappelons que le problème analogue en trois dimensions (posé par Képler) a été annoncé comme résolu par Thomas Hales en 1998, la démonstration publiée en 2005, et validée à l'aide d'un assistant de preuve par ordinateur en 2017. En 2016, Maryna Viazovska démontre le résultat analogue en dimension 8 et, peu après, en collaboration avec d'autres mathématiciens, résoud le cas de la dimension 24. Elle reçoit la médaille Fields pour ces découvertes en 2022.

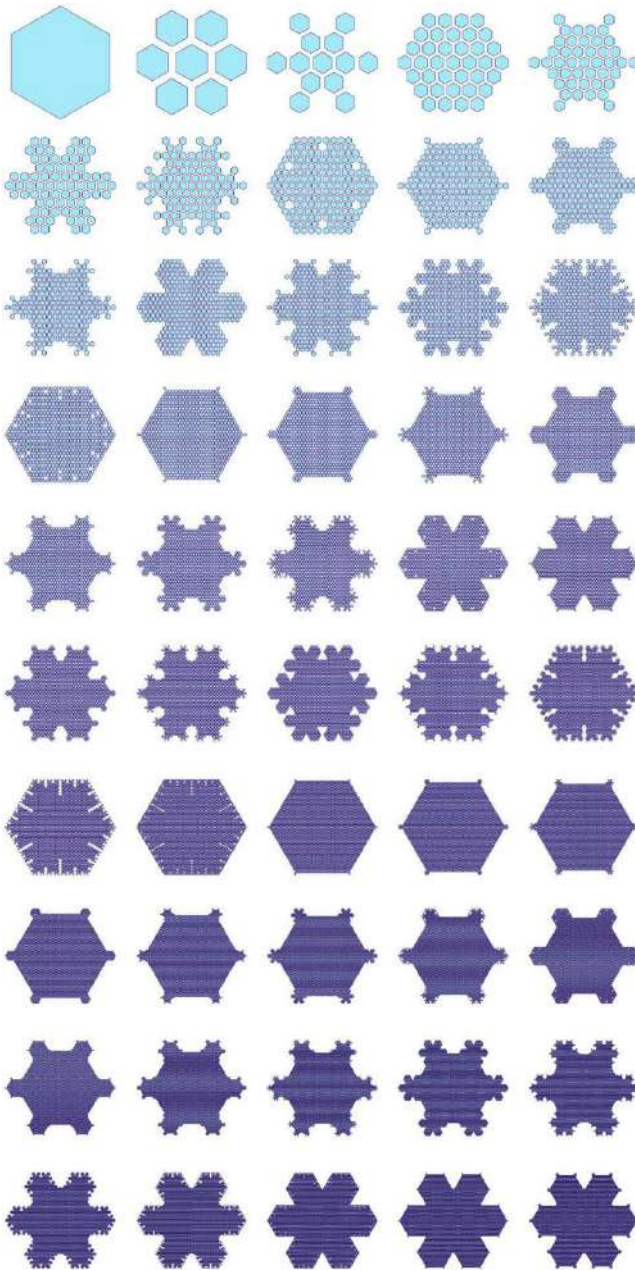


Figure. Les premières itérations. Etienne Ghys, *La petite histoire des flocons de neige*

Flocons de von Koch On peut proposer de réaliser (à la main, sur une feuille de papier) les premières itérations de la construction du flocon de Helge von Koch (1904).



FIGURE 5 – Les premières itérations. Illustration issue du blog 1peu2maths.fr

On pourra pour chaque étape

- Compter le nombre de côtés.
- Mesurer la longueur d'un côté, et en déduire le périmètre.
- Montrer que l'aire est, elle, uniformément bornée (avec ou sans calcul).

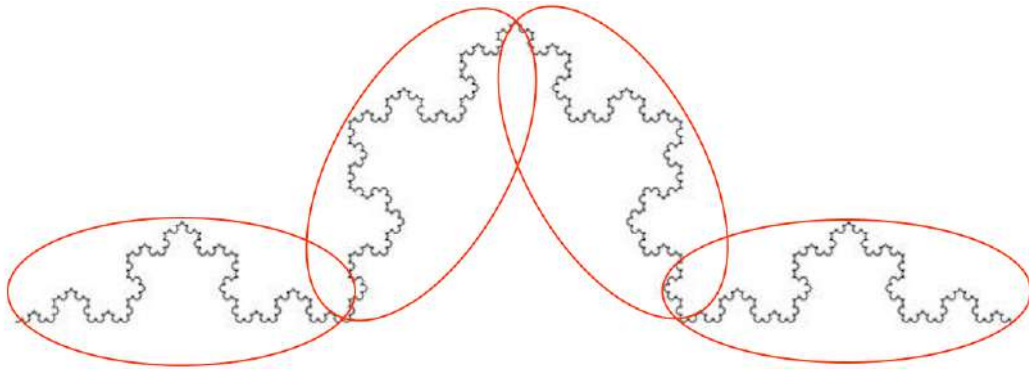


FIGURE 6 – Auto-similarité et dimension du bord du flocon de von Koch. Crédit Rémi Carles

Puis parler de la propriété d'auto-similarité et de la dimension du bord de l'objet limite. Si on multiplie par 3 les dimensions d'une figure de dimension d , on multiplie sa mesure par 3^d (essayer avec un segment, un triangle, un carré, un cube). Puisqu'on peut recomposer un "côté" à l'aide de quatre copies trois fois plus petites, la dimension est $d = \ln(4)/\ln(3) \approx 1.262$.

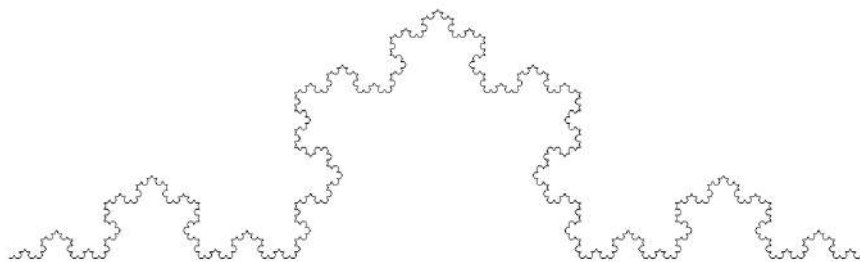


FIGURE 7 – Partie du flocon de von Koch générée avec l'application L-System-Studio .

Si l'on a accès à un ordinateur, on peut utiliser cette application pour générer le flocon de von Koch (avec l'axiome $F - -F - -F$ et la règle $F \rightarrow F + F - -F + F$ où $+$, $-$ représentent des angles de ± 60 degrés).

Ressources

Quel matériel ? Comment me le procurer ?

- Ce document imprimé pour les illustrations.
- Des feuilles de papier calque pour illustrer les groupes de symétrie.
- Des feuilles blanches pour le pliage et découpage de flocons.
- Des hexagones (beaucoup !) pour l'algorithme de Pacard.
- Feuilles (possiblement imprimées avec les deux premières étapes) et compas (?) pour le flocon de von Koch.

Qui contacter en cas de question, ou pour soumettre une modification ?

Vincent Duchêne

Pour aller plus loin

- Livre d'Etienne Ghys, *La petite histoire des flocons de neige*. Disponible en prêt à la bibliothèque de l'IRMAR.
- Site de Kenneth G. Libbrecht, <https://www.snowcrystals.com/>.